

לוגיקה (1) תרגיל 6

1. דואליות, תהי $L = \{P_1, \dots, P_n\}$ בתרגיל 4 הראתם כי 2^{2^n} הוא חסם עליון על גודל קבוצת פסוקים ב- L שאף שניים מהם אינם שקולים. בכיתה ראיתם שלכל לוח אמת יש קשר פסוקי מתאים, ולכן החסם הנ"ל הוא הדוק (חסם עליון). פסוק ϕ נקרא דואלי לעצמו אם קיים פסוק ϕ' דואלי ל- ϕ ו- $\phi \equiv \phi'$. הוכיחו כי $2^{2^{n-1}}$ הוא חסם עליון על גודל קבוצת פסוקים ב- L שכולם דואליים לעצמם ואף שניים מהם אינם שקולים. רמז חלקו את השורות בלוחות האמת לזוגות של שורה ושורה דואלית.

2. שלמות של קבוצת קשרים. בכיתה ראיתם כי קבוצת הקשרים $\{V, \wedge, \neg\}$ היא שלמה (כי כל פסוק שקול לפסוק בצורת איווי נורמלית).

(א) יהי $\diamond$ הקשר $nand$ המוגדר ע"י: $\phi \diamond \psi := \neg(\phi \wedge \psi)$. הוכיחו כי קבוצת הקשרים $\{\diamond\}$ שלמה.

(ב) יהי $\circ$ הקשר המוגדר ע"י: $\phi \circ \psi := (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg \psi)$. הוכיחו כי קבוצת הקשרים $\{\circ, \neg\}$ אינה שלמה. רמז השתמשו בתכונת הדואליות.

3. עצי אמת. לכל אחת מקבוצות הפסוקים הבאות בשפה $L = \{P, Q, R\}$: ציירו עץ אמת והסיקו אם הקבוצה עקבית. אם הקבוצה עקבית הסיקו מעץ האמת מהם כל המודלים שלה.

(א) $\{P \rightarrow Q, (\neg R \vee Q) \wedge \neg P\}$

(ב) $\{\neg P \wedge R, P \rightarrow \neg Q, R \vee \neg(R \rightarrow P)\}$

4. בתרגיל זה נשתמש בשפה לתחשיב הפסוקים על מנת להצרין טענות בתורת הגרפים. $G = (V, E)$ יהי גרף. (כלומר V קבוצת הקודקודים, ו- E קבוצת הצלעות כך שלכל $u, v \in V$: $(u, v) \in E \Leftrightarrow (v, u) \in E$ ו- $(u, v) \notin E$). תהי $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ קבוצה של צבעים. נגדיר שפה לתחשיב הפסוקים:

$$L = \{Q_{u,v} : u, v \in V\} \cup \{P_{v,i} : v \in V, 1 \leq i \leq n\}$$

(א) כתבו קבוצת פסוקים Φ בשפה L המתארת את הגרף G . כלומר ממודל של Φ ניתן לקבוע מהו G .

(ב) כתבו קבוצת פסוקים Ψ בשפה L המתארת צביעה של הגרף G . כלומר מודל של Ψ קובע ביחידות צביעה של G . (צביעה של G היא פונקציה $f: V \rightarrow C$).

(ג) צביעה f של G תקרא חוקית אם לכל $u, v \in V$:

$$(u, v) \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$$

כתבו קבוצת פסוקים Δ בשפה L שאומרת כי צביעה היא חוקית. כלומר לכל מודל A של $\Phi \cup \Psi$ מתקיים: $A \models \Delta$ אם ורק אם הצביעה המתאימה ל- A היא צביעה חוקית של G .

(ד) נסו לפתור את סעיפים (א)-(ג) כאשר לכל סעיף במקום קבוצת פסוקים נסו לכתוב פסוק (ביחיד). עבור אילו גרפים הדבר אפשרי?